

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. (4 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

a) Cho $a = 1$, hãy tìm b, c .

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đều dương thì $a = b = c$.

Bài 2. (3 điểm)

Cho ba số dương x, y, z thỏa điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz}.$$

Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh BC, AB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho

$$BM = \frac{1}{3}BC; \quad AN = \frac{1}{3}AB.$$

a) Chứng minh MN vuông góc với BC .

b) Gọi I là giao điểm của AM và CN . Tính góc BIC .

Bài 4. (3 điểm)

Giả sử a, b, c là ba số đôi một khác nhau và $c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ và phương trình $x^2 + bx + ca = 0$ có đúng một nghiệm chung thì các nghiệm khác của hai phương trình trên thỏa mãn phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

Bài 5. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH . Đường tròn tâm H bán kính HA cắt cạnh AC tại D . Đường thẳng qua D vuông góc với AC cắt BC tại E .

a) Chứng minh $BH = HE$.

b) Đường thẳng qua E vuông góc với BC cắt đường tròn (H) tại K, L . Chứng minh CK, CL là các tiếp tuyến của (H) .

Bài 6. (2 điểm)

Gọi S là tập hợp gồm 1011 số nguyên dương phân biệt có giá trị không quá 2020. Chứng minh rằng trong S có hai số mà tổng của chúng bằng 2021.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ (*)

a) Cho $a = 1$, hãy tìm b, c .

Thay $a = 1$ vào (*), ta có hệ:
$$\begin{cases} c = \frac{1}{b} \\ 1 + \frac{1}{b} = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{b} \\ b = 1 \vee b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} c = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c đều dương thì $a = b = c$.

- $a > b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} \Rightarrow b > c \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow c > a \Rightarrow a > a$ (vô lý)
- $a < b \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{c} \Rightarrow b < c \Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{a} \Rightarrow c < a \Rightarrow a < a$ (vô lý)
- $a = b \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b = c$.

Bài 2. (3 điểm)

Cho ba số dương x, y, z thỏa điều kiện $x + y + z \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz}.$$

Giải.

$$P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = \frac{y+z}{xyz} \geq \frac{y+z}{x \left(\frac{y+z}{2} \right)^2} \geq \frac{4}{x(y+z)} \geq \frac{4}{\left(\frac{x+y+z}{2} \right)^2} \geq \frac{16}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} y = z \\ x = y + z \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = z = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{16}{9}$.

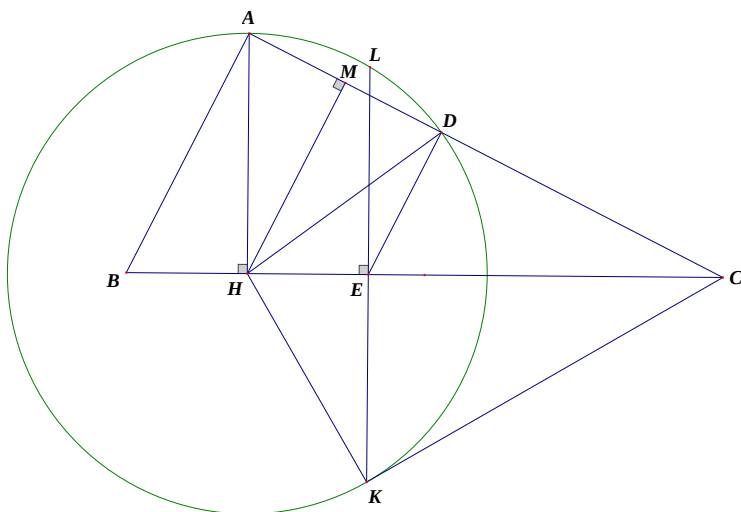
Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh BC, AB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho

$$BM = \frac{1}{3}BC; \quad AN = \frac{1}{3}AB.$$

a) Chứng minh MN vuông góc với BC .

b) Gọi I là giao điểm của AM và CN . Tính góc BIC .



a/ Chứng minh $BH = HE$.

Kẻ HM vuông góc với $AD \Rightarrow MA = MD$.

Ta có $MH \parallel AB \parallel DE$ và $MA = MD \Rightarrow BH = HE$.

b/ Chứng minh CK, CL là các tiếp tuyến của (H) .

Ta có $HK^2 = HA^2 = HB \cdot HC = HE \cdot HC$

$\Rightarrow \triangle HEK \sim \triangle HKC$

$\Rightarrow \angle HKC = \angle HEK = 90^\circ$

$\Rightarrow CK$ là tiếp tuyến của (H) .

Tương tự CL cũng là tiếp tuyến của (H) .

Bài 6. (2 điểm)

Gọi S là tập hợp gồm 1011 số nguyên dương phân biệt có giá trị không quá 2020. Chứng minh rằng trong S có hai số mà tổng của chúng bằng 2021.

Giải.

Xét tập hợp T gồm tất cả các số dạng $2021 - s$ với $s \in S$.

Do đó T cũng có 1011 số nguyên dương phân biệt có giá trị không quá 2020.

Từ đó tập $S \cup T$ có 2022 số nguyên dương có giá trị không quá 2020.

Nên tồn tại hai số $x, y \in S$ sao cho $x = 2021 - y$ hay $x + y = 2021$ (x không thể bằng y do 2021 là số lẻ).